Arbeitsteilige Untersuchung eines Polyeders

von Lutz Führer, Goethe-Universität Frankfurt am Main

In einem Bonner Eisladen entdeckte ich vor ein paar Jahren das rechts abgebildete Plexiglas-Polyeder. Die Funktion des Objekts war leicht zu raten: In vager Anspielung auf einen Eiskristall sollte für Campari geworben werden, und außerdem steckte eine kleine Eiskarte im Polyeder, um auf das Tagesangebot aufmerksam zu machen. Auch das wunderschöne Wetter signalisierte eindeutig: Es gab keinen ernsthaften Grund zu mathematischen Untersuchungen...

Da ich aber ständig Ausschau nach ungewöhnlichen Realobjekten gehalten hatte, um sie irgendwie für den Unterricht zu mißbrauchen, konnte ich nicht widerstehen:

Eine teils handwerkliche, teils analytische Untersuchung des „Kristalls" bot sich an, weil das „pseudo-reale" Objekt · gerade komplex genug zu sein schien,

- um beim Wiedererkennen Gelerntes im realen Kontext als Aha-Erlebnis einzuprägen,
- um ein wenig Respekt vor handwerklicher Praxis samt ihrer immer spezifischen Meßprobleme zu vermitteln und
- weil es zu einer arbeitsteiligen Gruppenarbeit einlud.

Da es – wie oben schon erwähnt – keine ersichtliche Notwendigkeit zu derartigen handwerklichen oder mathematischen Nachuntersuchungen gab, ist das folgende sicher nicht als Beispiel für „Anwendungsorientierung" zu nehmen.

Oder vielleicht doch? Ich möchte jedenfalls dieses Beispiel – nach einschlägigen Erfahrungen in der Gruppenarbeit und –zusammenführung – zum Anlass nehmen, für „Formale" Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht edine Lanze zu brechen.

Arbeitsteilige Gruppenarbeit zur Untersuchung eines konkreten Polyeders

<u>Arbeitsteilige Gruppenarbeit (i. a. ≥ 2 h)</u>

Vorschläge für Untersuchungen (ohne Kritik)

Vorschläge für geeignete Vorgehensweisen

Auswahl, Gruppen- und Zeiteinteilung

Arbeit in den Gruppen

Zwischenberichte im Plenum

Arbeit in den Gruppen

...

Abschlußberichte im Plenum

Zusammenführung der Ergebnisse

Kritischer Rückblick: Lernerfolge,
Mängel, Anschlußfragen ...

Ausmessung des Polyeders
exaktes Schrägbild
Tetraederabschnitt?
Volumenberechnung

Vermessung des Polyeders

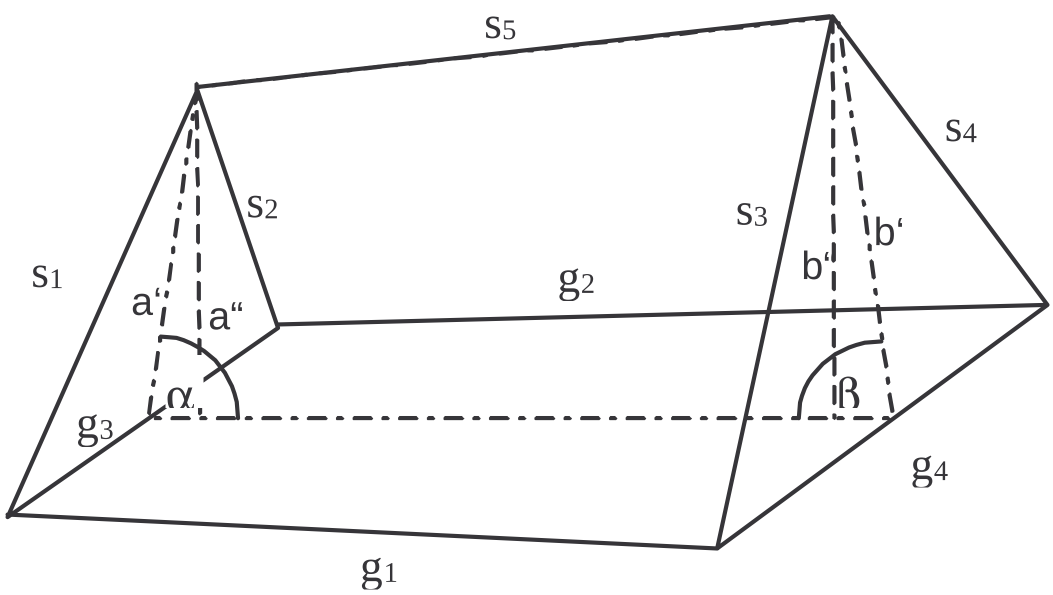
Aufgaben:

Der Acrylglaskörper ist leider schon etwas abgestoßen. Versuchen Sie bitte bei den folgenden Messungen, die ursprünglichen Maße (bei scharfen Kanten) zu rekonstruieren. Beraten Sie dazu in Ihrer Gruppe, wie man die einzelnen Messungen möglichst geschickt und zuverlässig vornehmen kann. Es kommt weniger auf die Meßergebnisse an, als auf Ihre Erfahrungen und Ideen beim Messen.

1. Bestimmen Sie die in der Zeichnung benannten Strecken und Winkel möglichst genau, und tragen Sie sie in eine Netzskizze (Overheadfolie) ein.

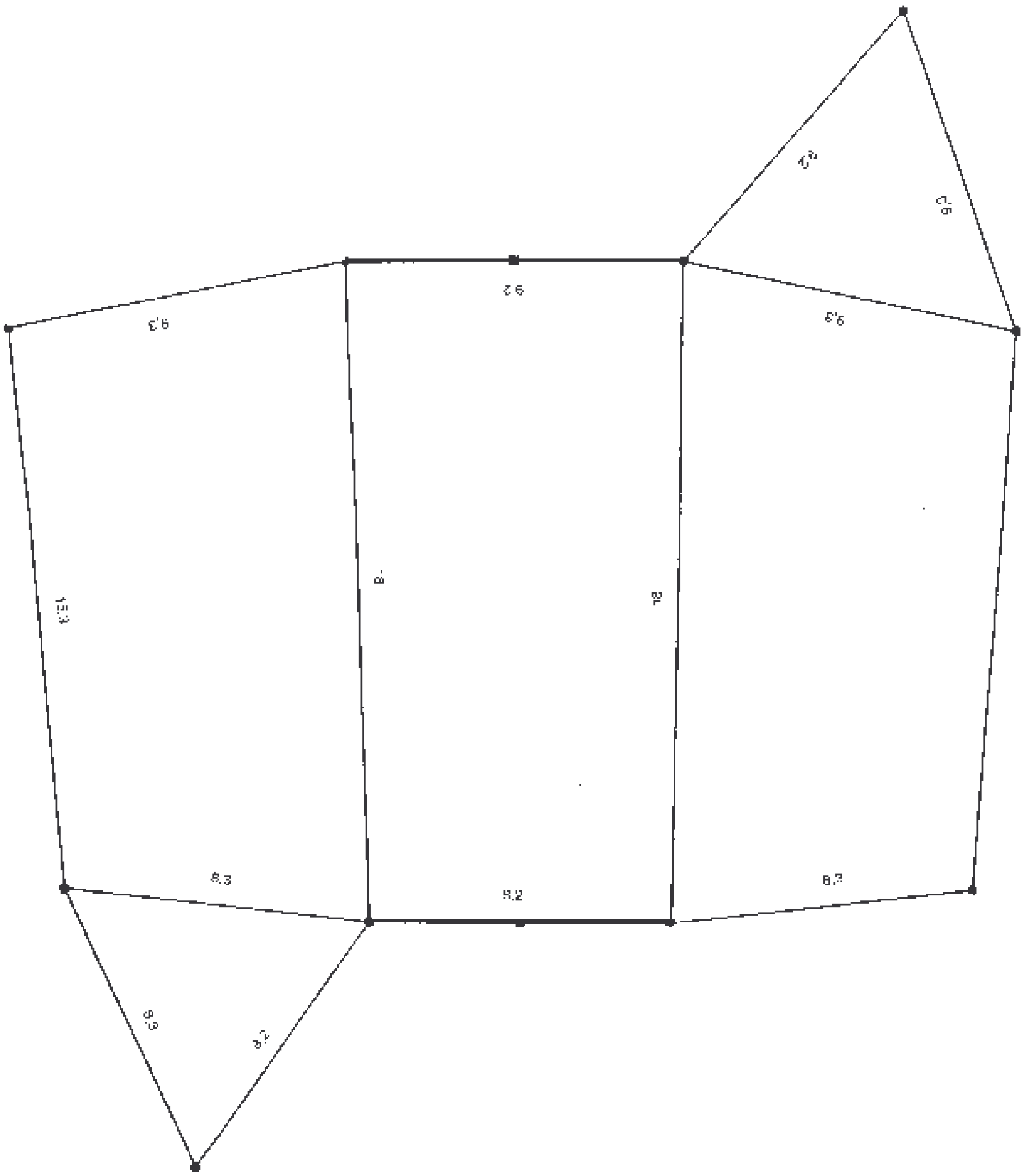
2. Bestimmen Sie die Volumina des Außen- und des Innenkörpers möglichst genau.

   α und β sind die Neigungswinkel der Dreiecke. Der gestrichelte Rahmen stellt die zur größten Polyederseite senkrechte Ebene durch die „Firstkante“ dar.



Schrägbild des Polyeders

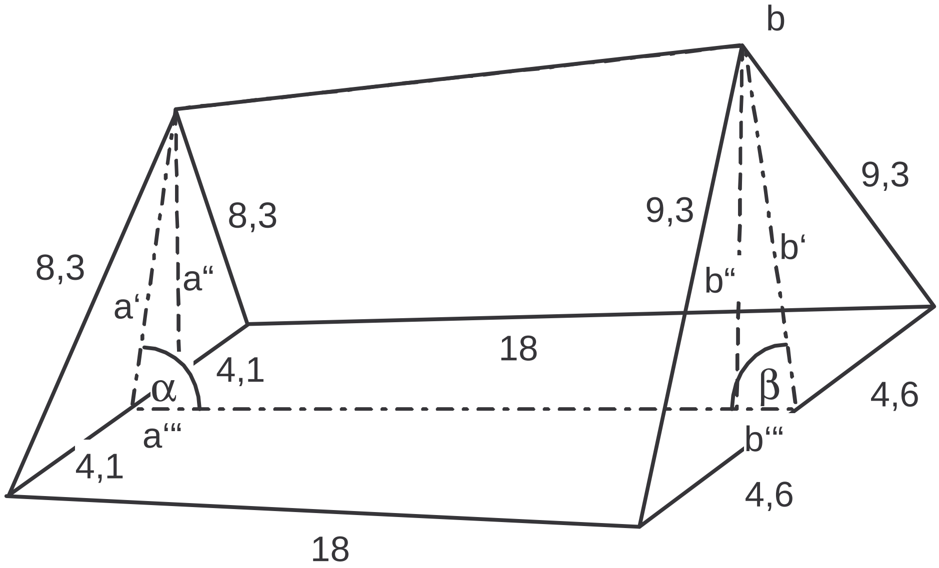
Hier ist ein Netz des Polyeders:



Erläutern Sie, wie man daraus ein genaues Schrägbild des Körpers bekommen kann, und fertigen Sie ein solches an. Welche geometrischen Eigenschaften der Parallelprojektion sind beim Zeichnen hilfreich?

Ist das Polyeder ein Tetraederabschnitt?

α und β sind die Neigungswinkel der Dreiecke. Sie wurden zu $\alpha = 82°$ bzw. $\beta = 80°$ gemessen.



Da sich das Polyeder zu einer Seite hin verengt, liegt die Vermutung nahe, daß es einen Ausschnitt eines Tetraeders (Dreieckspyramide) darstellt. Untersuchen Sie bitte diese Vermutung unter folgenden Annahmen:

- Das gegebene Polyeder ist symmetrisch zur gestrichelt angedeuteten Ebene.

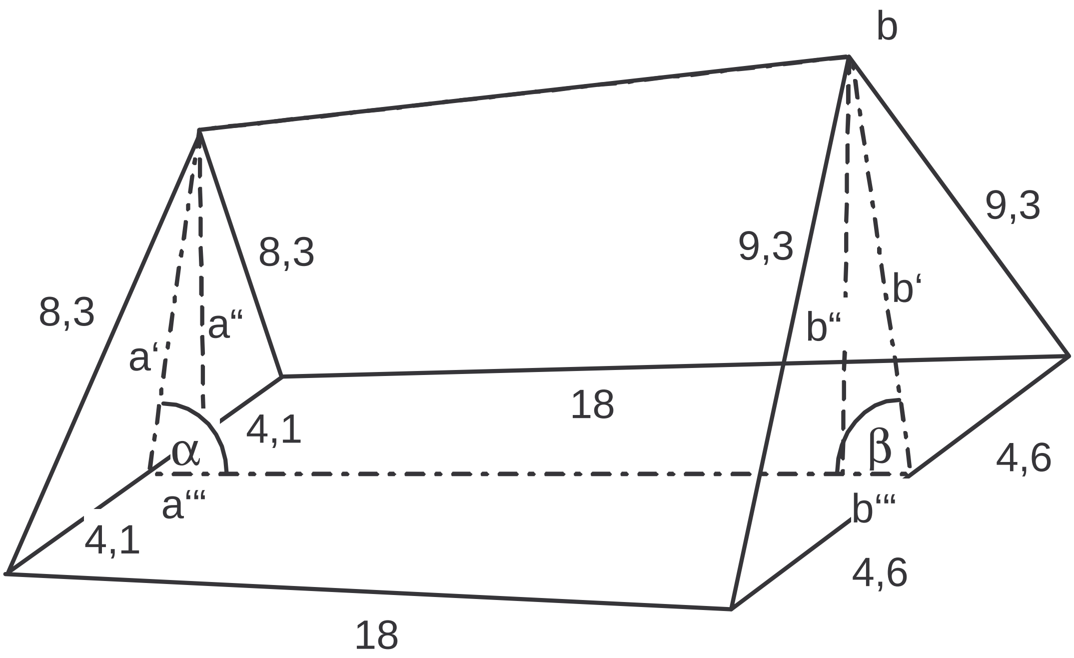
- Die angegebenen Längenwerte in *cm* sind nur auf *mm* genau gemessen und gerundet.

Hinweis:

Es empfiehlt sich, die mit *a’*, *a“* und *a’“* sowie die mit *b’*, *b“* und *b’“* gekennzeichneten Strecken auszurechnen.

Das Volumen des Polyeders

α und β sind die Neigungswinkel der Dreiecke. Sie wurden zu $\alpha = 82°$ bzw. $\beta = 80°$ gemessen.



Nehmen Sie an, das Polyeder sei symmetrisch zur Ebene der gestrichelten Linien.

Wie könnte man das Volumen unter dieser Annahmen und anhand der gegebenen Daten berechnen?

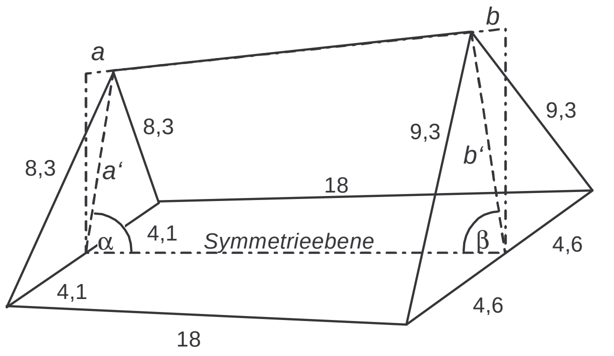
- Schätzen Sie das Ergebnis erst einmal sinnvoll ab.
- Diskutieren Sie dann einen geeigneten Weg zur Berechnung,

und

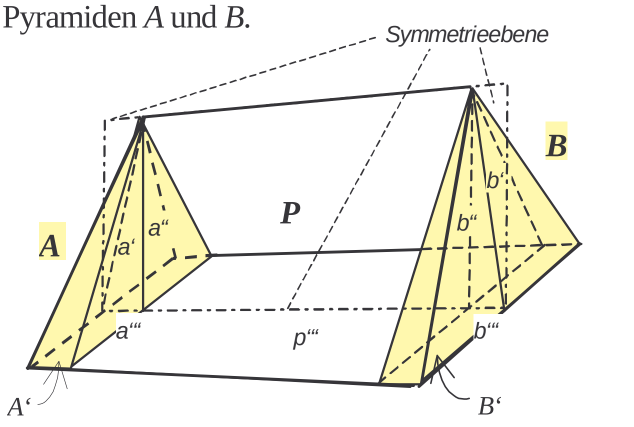
- teilen Sie sich schließlich die Rechenarbeit.

Lösung zur Volumenberechnung

α und β sind die Neigungswinkel der Dreiecke. Sie wurden zu $\alpha = 82°$ bzw. $\beta = 80°$ gemessen.



Zerlegung in ein Prismatoid *P* und zwei angesetzte Pyramiden *A* und *B*.



a″ und *b″* sind Lotstrecken auf den Grundriss, *a‴* bzw. *b‴* und *p‴* sind die erzeugten Abschnitte im Grundriss. *a″* und *b″* liegen in Deckdreiecken von *A*, *B* und *P*, die senkrecht sowohl auf dem Grundriss als auch auf der Symmetrieebene stehen. Diese Deckdreiecke seien bezugsgerecht mit *A″* bzw. *B″* bezeichnet. Zwischen ihnen und den unteren Seitenkanten des großen Körpers liegen im Grundriss die Trapeze *A’* und *B’* als „Grundflächen“ der abgeschnittenen Pyramiden *A* bzw. *B*.

Berechnung der Teilpyramide A:

Nimmt man *A′* als „Grundfläche“ so gehört dazu die „Höhe“ *a″*. Für die Maßzahlen (in *cm* und ohne Betragsstriche geschrieben) gelten:

$$a''' + p''' + b''' = \sqrt{18^2 - 0{,}5^2} \approx 17{,}993 \quad \text{(Pythagoras)}$$

$$a' = \sqrt{8{,}3^2 - 4{,}1^2} \approx 7{,}217 \ ; \ a''' = a' \cdot \cos 82° \approx 1{,}004 \quad \text{(Projektionen)}$$

$$A' \approx \frac{1}{2} \cdot \left(8{,}2 + 8{,}2 + \frac{1{,}004}{17{,}993} \cdot 1 \right) \cdot a''' \approx 8{,}261 \quad \text{(Strahlensatz)}$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot A' \cdot a'' = \frac{1}{3} \cdot A' \cdot a' \cdot \sin\alpha \approx 19{,}7 \quad \text{(Pyramidenvolumen)}$$

Berechnung der Teilpyramide B:

$$b' = \sqrt{9{,}3^2 - 4{,}6^2} \approx 8{,}083 \ ; \ b''' = b' \cdot \cos 80° \approx 1{,}404$$

$$B' \approx \frac{1}{2} \cdot \left(9{,}2 + 9{,}2 - \frac{1{,}404}{17{,}993} \cdot 1 \right) \cdot b''' \approx 12{,}858$$

$$B = \frac{1}{3} \cdot B' \cdot b'' = \frac{1}{3} \cdot B' \cdot b' \cdot \sin\beta \approx 34{,}1$$

Berechnung des Prismatoiden P:

Leider ist im Rahmen der Messfehler unsicher, ob *P* ein Tetraederstumpf ist. Nimmt man es näherungsweise an, dann ist $P = \frac{1}{3}\left(A''+B''+\sqrt{A''\cdot B''}\right) \cdot p''' \approx 511{,}9$. Ohne diese Annahme bestimme man den zu *A″* und *B″* parallelen Mittelschnitt *M″*. Aus der Keplerschen Fassregel erhält man damit 511,8.

Gesamtvolumen:

$$\underline{\underline{A + P + B \approx 566 \ cm^3}} \ .$$

Fortsetzng erwünscht?

… ungewöhnliche Gebrauchsformen …

Man muss es nur sehen wollen:

Verpackungsmaterialien, Hausdächer, Steinfliesen u.v.a.m. sind allemal reizvoller zum Studieren als die üblichen „Grundkörper“ der schulischen Raumgeo- und Stereometrie.

Hier zwei Eisschälchen aus Marktbreit (2002):